

УДК 519.63

© *Т. В. Горбова***ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ МОДЕЛИ ПОПУЛЯЦИОННОЙ ДИНАМИКИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ**

Для дробно-диффузионного уравнения с нелинейностью в операторе дифференцирования и с эффектом функционального запаздывания строится неявный численный метод, основанный на аппроксимации дробной производной и применении интерполяции и экстраполяции дискретной предыстории. Источником данной задачи является обобщенная модель из теории популяции. С помощью дробного дискретного аналога леммы Гронуолла доказана сходимость метода при определенных условиях. Возникающая система нелинейных уравнений с помощью метода Ньютона сводится к последовательности линейных систем с трехдиагональными матрицами. Результаты продемонстрированы на тестовом примере с распределенным запаздыванием и на модельном примере из теории популяции с постоянным сосредоточенным запаздыванием.

*Ключевые слова:* модель популяций, дробно-диффузионное уравнение, нелинейность в операторе дифференцирования, функциональное запаздывание, разностная схема, метод Ньютона, порядок сходимости.

DOI: 10.35634/2226-3594-2021-57-03

**Введение**

Среди моделей популяционной динамики выделяется модель, предложенная в работе [1], в которой авторы в стремлении учесть различные факторы, действующие на динамику популяции, применили одновременно такие математические средства, как зависимость количества особей в популяции от времени и двух пространственных координат, дробную производную по времени, нелинейную диффузию (вторые производные по пространству берутся от нелинейных функции искомой функции), нелинейную зависимость неоднородности от искомой функции. Все эти эффекты ранее встречались в других моделях, но не вместе. Эта обобщенная дробная модель популяции (time fractional-order biological population model) записывается следующим образом: если  $p(x, y, t)$  — плотность популяции в точке с координатами  $(x, y)$  в момент  $t$ ,  $f(x, y, t)$  — численность популяции,  $\phi(p)$  — функция неоднородности, тогда

$$\frac{\partial^\alpha p}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^2 \phi(p)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi(p)}{\partial y^2} + f(p), \quad t \geq 0, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (0.1)$$

Для решения такого рода уравнений авторы предложили аппарат, который фактически сводится к разложению в ряды. В вышеупомянутой работе отсутствует еще один фактор, часто встречающийся в моделях популяции — эффект запаздывания. Это эффект в теории популяции изучался, начиная с моделей Хатчинсона (см. [2]), и достаточно хорошо изучен как аналитическими, так и численными средствами.

В данной работе рассматривается одномерное по пространству уравнение подобное уравнению (0.1), но с эффектом запаздывания общего вида. В силу сложности объекта, основным приемом при решении таких уравнений являются сеточные методы. Сеточные методы активно применяются в последнее время для различных классов уравнений с дробными производными [3–8]. Наличие нелинейности в операторе дифференцирования приводит к необходимости решать на каждом шаге по времени системы нелинейных уравнений.

Особую трудность вызывают обоснование устойчивости и сходимости нелинейных сеточных методов для дробных по времени уравнений с порядком производной от 0 до 1. В работе предлагается численный алгоритм решения данной задачи, сходящийся при выполнении некоторого условия. Несмотря на сложность проверки этого условия, оно выполняется для некоторых задач популяционной динамики [1], в которых нелинейность квадратичная. При доказательстве сходимости используется техника, основанная на использовании дробного дискретного неравенства Гронуолла [9–11], а также техника исследования численных алгоритмов с эффектом запаздывания [12]. Для реализации нелинейной разностной схемы используется прием, изложенный в [13], состоящий в переводе нелинейности в производную по времени с последующим применением метода Ньютона. Приводятся результаты численных экспериментов на тестовом примере и примере из [1]. Отметим, что ранее для этого уравнения алгоритм был анонсирован в [14]. В данной работе приводится доказательство теоремы сходимости при определенных условиях.

## § 1. Формулировка задачи

Рассмотрим уравнение вида

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^2 \phi(u)}{\partial x^2} + f(x, t, u(x, t), u_t(x, \cdot)), \quad (1.1)$$

$0 \leq t \leq T$ ,  $0 \leq x \leq X$ , — независимые переменные,  $u(x, t)$  — искомая функция,  $u_t(x, \cdot) = \{u(x, t + s), \tau \leq s < 0\}$  — предыстория искомой функции к моменту  $t$ ,  $\tau$  — величина запаздывания. Дробная производная Капуто порядка  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ , определяется формулой

$$\frac{d^\alpha F(t)}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^t \frac{F'(\xi)}{(t - \xi)^\alpha} d\xi, \quad x > 0.$$

Введем граничные и начальные условия

$$u(0, t) = u_0(t), \quad u(X, t) = u_1(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x, t), \quad 0 \leq x \leq X, \quad -\tau \leq t \leq 0. \quad (1.3)$$

Предположим, что решение  $u(x, t)$  задачи (1.1)–(1.3) существует и единственно. Обозначим за  $Q = Q[-\tau, 0)$  множество функций  $v(s)$ , кусочно-непрерывных на  $[-\tau, 0)$  с конечным числом точек разрывов первого рода, причем в точках разрыва непрерывных справа. Определим норму функций в  $Q$  равенством

$$\|v(\cdot)\|_Q = \sup_{s \in [-\tau, 0)} |v(s)|.$$

Кроме того, предположим, что функционал  $f(x, t, u, v(\cdot))$  определен на  $[0, X] \times [0, T] \times \mathbb{R} \times Q$  и липшицев по двум последним аргументам, т.е. существует константа  $L_f$  такая что для любого  $x \in [0, X]$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $u^1 \in \mathbb{R}$ ,  $u^2 \in \mathbb{R}$ ,  $v^1(\cdot) \in Q$ ,  $v^2(\cdot) \in Q$  выполняется

$$|f(x, t, u^1, v^1(\cdot)) - f(x, t, u^2, v^2(\cdot))| \leq L_f(|u^1 - u^2| + \|v^1(\cdot) - v^2(\cdot)\|_Q).$$

## § 2. Разностная схема

Разобьем отрезок пространственной переменной  $[0, X]$  с шагом  $h = X/N$ , введя точки  $x_i = ih$ ,  $i = 0, \dots, N$ . Отрезок  $[0, T]$  разобьем с шагом  $\Delta = \frac{T}{M}$ . Без ограничения общности будем считать, что  $\frac{\tau}{\Delta} = M_0 \in \mathbb{N}$ . Пусть  $t_j = j\Delta$ ,  $j = -M_0, \dots, M$ .

Приближения функций  $u(x_i, t_j)$  в узлах сетки обозначим  $u_j^i$ . Заменим производную Капуто на разностный оператор

$$D_{\Delta}^{\alpha} u_m^i = \frac{\Delta^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=1}^m a_{m-j}, (u_j^i - u_{j-1}^i), \quad a_i = (i+1)^{1-\alpha} - i^{1-\alpha}. \quad (2.1)$$

Если точное решение задачи (1.1)–(1.3)  $u(x, t)$  дважды непрерывно дифференцируемо по  $t$ , то (см., например, [15, с. 48] или ссылки в [9]) метод (2.1) имеет порядок  $2 - \alpha$

$$\frac{\partial^{\alpha} u(x, t_m)}{\partial t^{\alpha}} = D_{\Delta}^{\alpha} u(x, t_m) + G_m, \quad |G_m| \leq C \Delta^{2-\alpha}.$$

Этот результат называется  $L_1$ -аппроксимацией дробной производной.

Заменим вторую производную по  $x$  разностным оператором

$$\delta_x^2 \phi(u_m^i) = \frac{\phi(u_m^{i-1}) - 2\phi(u_m^i) + \phi(u_m^{i+1}))}{h^2}.$$

Если точное решение задачи (1.1)–(1.3)  $u(x, t)$  четырежды непрерывно дифференцируемо по  $x$  и функция  $\phi(u)$  дважды непрерывно дифференцируема, тогда

$$\frac{\partial^2 \phi(u(x_i, t_m))}{\partial x^2} = \delta_x^2 \phi(u(x_i, t_m)) + R_m^i, \quad |R_m^i| \leq C h^2,$$

где  $C$  — независимая переменная. Для каждого фиксированного  $i = 0, \dots, N$  введем дискретную предысторию  $t_j$ ,  $j = 0, \dots, M$ :  $\{u_k^i\}_j = \{u_k^i, j - M_0 \leq k \leq j\}$ . Оператором интерполяции (с экстраполяцией) дискретной предыстории мы называем отображением  $I$ , ставящее в соответствие дискретной предыстории  $\{u_k^i\}_j$  функцию  $u_j^i(\cdot)$  определенную на  $[t_j - \tau, t_j + \Delta]$ .

Будем говорить, что оператор интерполяции-экстраполяции имеет порядок погрешности  $p$  на точном решении, если существуют константы  $C_1$  и  $C_2$  такие, что для всех  $i$ ,  $m$  и  $t \in [t_m - \tau, t_{m+1}]$  выполняется неравенство

$$|u_m^i(t) - u(x_i, t)| \leq C_1 \max_{m-M_0 \leq k \leq m} |u_k^i - u(x_i, t_k)| + C_2 \Delta^p.$$

Будем использовать кусочно-постоянную интерполяцию

$$u_m^i(t_m + s) = u_{k-1}^i, \quad t_{k-1} \leq t_m + s \leq t_k, \quad (2.2)$$

с экстраполяцией продолжением

$$u_m^i(t_m + s) = u_{m-1}^i, \quad t_m \leq t_m + s \leq t_{m+1}. \quad (2.3)$$

Если точное решение непрерывно дифференцируемо по  $t$ , то этот оператор интерполяции-экстраполяции имеет первый порядок [16, с. 95, 103].

Для более точного метода будем использовать кусочно-линейную интерполяцию

$$u_j^i(t_j + s) = \frac{1}{\Delta} ((t_k - t_j - s)u_{k-1}^i + (t_j + s - t_{k-1})u_k^i), \quad t_{k-1} \leq t_j + s \leq t_k, \quad (2.4)$$

с экстраполяцией продолжением

$$u_j^i(t_j + s) = \frac{1}{\Delta} ((-s)u_{k-1}^i + (\Delta + s)u_k^i), \quad t_j \leq t_j + s \leq t_{j+1}. \quad (2.5)$$

Этот оператор интерполяции-экстраполяции имеет второй порядок [16], если точное решение дважды непрерывно дифференцируемо по  $t$ .

Для  $m = 1, 2, \dots, M$  рассмотрим нелинейную неявную разностную схему

$$D_{\Delta}^{\alpha} u_m^i = \delta_x^2 \phi(u_m^i) + f(x_i, t_m, u_{m-1}^i, u_{m-1}^i(\cdot)), \quad i = 1, \dots, N-1, \quad (2.6)$$

$u_m^0 = u_0(t_m)$ ,  $u_m^N = u_1(t_m)$ , с начальными условиями  $u_m^i = \varphi(x_i, t_m)$ ,  $i = 0, \dots, N$ ,  $m = -M_0, \dots, 0$ , где  $u_{m-1}^i(\cdot)$  является результатом кусочно-постоянной интерполяции с экстраполяцией продолжением (2.2), (2.3).

**З а м е ч а н и е 1.** Более точный вариант неявной разностной схемы

$$D_{\Delta}^{\alpha} u_m^i = \delta_x^2 \phi(u_m^i) + f(x_i, t_m, 2u_{m-1}^i - u_{m-2}^i, u_{m-1}^i(\cdot)), \quad i = 1, \dots, N-1, \quad (2.7)$$

где  $u_{m-1}^i(\cdot)$  — результат кусочно-линейной интерполяции с экстраполяцией продолжением (2.4), (2.5).

### § 3. Анализ погрешности

В предположении однозначной разрешимости метода (2.6) проведем анализ его погрешности.

Погрешностью метода (2.6) называется разность  $\varepsilon_m^i = u(x_i, t_m) - u_m^i$ . Будем говорить, что погрешность имеет порядок  $\Delta^p + h^q$ , если существует константа  $C$  такая, что для любого  $i = 1, \dots, N-1$ ,  $m = 1, \dots, M$  выполнено неравенство  $|\varepsilon_m^i| \leq C(\Delta^p + h^q)$ .

Невязкой (без интерполяции) метода (2.6) назовем сеточную функцию

$$\psi_m^i = D_{\Delta}^{\alpha} u(x_i, t_m) - \delta_x^2 \phi(u(x_i, t_m)) - f(x_i, t_m, u(x_i, t_m), u_{t_m}(x_i, \cdot)), \\ i = 1, \dots, N-1, \quad m = 1, \dots, M.$$

**Л е м м а 3.1** (Порядок невязки без интерполяции). *Если функция  $\phi(u)$  дважды непрерывно дифференцируема, точное решение задачи (1.1)–(1.3)  $u(x, t)$  дважды непрерывно дифференцируемо по  $t$ , и четырежды непрерывно дифференцируемо по  $x$ , то невязка (без интерполяции) метода (2.6) имеет первый порядок малости по  $t$  и второй по  $x$ , т. е. найдется постоянная  $C$  такая, что для всех  $i = 1, \dots, N-1$ ,  $m = 1, \dots, M$*

$$|\psi_m^i| \leq C(\Delta + h^2).$$

Доказательство проводится стандартным методом с помощью тейлоровского разложения решения  $u(x, t)$  и функции  $\phi(u)$  в определении невязки.

Невязкой с интерполяцией метода (2.6) назовем сеточную функцию

$$\hat{\psi}_m^i = D_{\Delta}^{\alpha} u(x_i, t_m) - \delta_x^2 \phi(u(x_i, t_m)) - f(x_i, t_m, u(x_i, t_{m-1}), I(\{u(x_i, t_k)\}_{m-1})), \quad (3.1)$$

где  $I(\{u(x_i, t_k)\}_{m-1})$  — результат кусочно-постоянной интерполяции с экстраполяцией продолжением дискретной предыстории точного решения.

**Л е м м а 3.2.** *Если функция  $\phi(u)$  дважды непрерывно дифференцируема, точное решение задачи (1.1)–(1.3)  $u(x, t)$  дважды непрерывно дифференцируемо по  $t$  и четырежды непрерывно дифференцируемо по  $x$ , то невязка с интерполяцией метода (2.6) имеет первый порядок малости по  $t$  и второй по  $x$ .*

Утверждение вытекает из леммы 3.1 и из того, что кусочно-постоянная интерполяция с экстраполяцией продолжением имеет первый порядок.

Приведем вариант дискретного дробного неравенства Гронуолла.

**Л е м м а 3.3** (см. [9]). Пусть имеются неотрицательные последовательности  $w_k$  и  $g_k$ , удовлетворяющие

$$D_{\Delta}^{\alpha} w_k \leq \lambda_1 w_k + \lambda_2 w_{k-1} + g_k, \quad \lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0,$$

тогда

$$w_k \leq 2 \left( w_0 + \frac{(t_k)^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} \max_{0 \leq j \leq k} g_j \right) E_{\alpha}(2\lambda(t_k)^{\alpha}),$$

где  $\lambda = \lambda_1 + \frac{\lambda_2}{a_0 - a_1}$ ,  $a_0 - a_1 = 2 - 2^{1-\alpha}$ ,  $E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1+k\alpha)}$  — функция Миттаг-Леффлера.

**Л е м м а 3.4** (Формула суммирования по частям). Пусть  $u = (0, u^1, u^2, \dots, u^{N-1}, 0)$ ,  $v = (0, v^1, v^2, \dots, v^{N-1}, 0)$ , обозначим  $\delta_x u^{i+1/2} = \frac{u^{i+1} - u^i}{h}$ ,  $i = 0, 1, \dots, N-1$ . Тогда

$$\sum_{i=1}^{N-1} \delta_x^2 u^i v^i = - \sum_{i=0}^{N-1} \delta_x u^{i+1/2} \delta_x v^{i+1/2}.$$

Утверждение леммы проверяется непосредственно по определению.

Приведем также несколько норм, которые будут использоваться в доказательстве теоремы сходимости.

Для  $u = (0, u^1, u^2, \dots, u^{N-1}, 0)$ ,  $v = (0, v^1, v^2, \dots, v^{N-1}, 0)$  введем скалярное произведение

$$\langle u, v \rangle = h \sum_{i=0}^{N-1} \delta_x u^{i+\frac{1}{2}} \delta_x v^{i+\frac{1}{2}},$$

послойную разностную норму  $\|u\|^2 = \langle u, u \rangle$  и послойную энергетическую норму

$$\langle u, v \rangle_h = h \sum_{i=0}^{N-1} u^i v^i, \quad \|u\|_h^2 = \langle u, u \rangle_h.$$

Введем также послойную максимум-норму

$$\|u\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq N-1} |u^i|.$$

Отметим связь норм [10]

$$\|u\|_{\infty}^2 \leq \frac{X}{4} \|u\|^2, \quad (3.2)$$

$$\|u\|_h^2 \leq \frac{X^2}{6} \|u\|^2. \quad (3.3)$$

Сформулируем одно условие, при котором выполняется сходимость метода. Предварительно заметим, что если функция  $\phi$  непрерывно дифференцируема, то по формуле конечных приращений  $\phi(u(x_i, t_m)) - \phi(u_m^i) = \phi'(\vartheta_m^i) \varepsilon_m^i$ .

**У с л о в и е 3.1.** Пусть выполняется

$$\sum_{i=1}^{N-1} (-h \delta_x^2 \varepsilon_m^i) \delta_x^2 (\phi(u(x_i, t_m)) - \phi(u_m^i)) \leq \sum_{i=1}^{N-1} (-h) (\delta_x^2 \varepsilon_m^i)^2. \quad (3.4)$$

Заметим, что если функция  $\phi$  непрерывно дифференцируема, то по формуле конечных приращений  $\phi(u(x_i, t_m)) - \phi(u_m^i) = \phi'(\vartheta_m^i) \varepsilon_m^i$ , где  $\vartheta_m^i$  — точка между  $u(x_i, t_m)$  и  $u_m^i$ . Тогда условие (3.4) можно переписать в виде

$$\sum_{i=1}^{N-1} (-h \delta_x^2 \varepsilon_m^i) \delta_x^2 (\phi'(\vartheta_m^i) \varepsilon_m^i) \leq \sum_{i=1}^{N-1} (-h) (\delta_x^2 \varepsilon_m^i)^2.$$

Если в окрестности точного решения  $u(x_i, t_m)$  выполняется

У с л о в и е 3.2.

$$\phi'(u) \geq 1,$$

то условие 3.1 заведомо выполняется.

**Т е о р е м а 3.1.** *Предположим, что выполняются условия леммы 3.1 и условие 3.1. Тогда погрешность метода (2.6) имеет первый порядок малости по  $\Delta$  и второй по  $h$ .*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Из (2.6) и (3.1) получаем

$$D_{\Delta}^{\alpha} \varepsilon_m^i = \delta_x^2 (\phi(u_m^i) - \phi(u(x_i, t_m)) + f(x_i, t_m, u(x_i, t_{m-1}), I(\{u(x_i, t_k)\}_{m-1})) - \\ - f(x_i, t_m, u_{m-1}^i, u_j^i(\cdot)) + \hat{\psi}_m^i.$$

Умножим обе части этого равенства на  $-h\delta_x^2 \varepsilon_m^i$  и просуммируем по  $i$  от 1 до  $N-1$ :

$$- \sum_{i=1}^{N-1} h\delta_x^2 \varepsilon_m^i D_{\Delta}^{\alpha} \varepsilon_m^i = \sum_{i=1}^{N-1} (-h\delta_x^2 \varepsilon_m^i) \delta_x^2 (\phi(u_m^i) \varepsilon_m^i) + \\ + \sum_{i=1}^{N-1} (-h\delta_x^2 \varepsilon_m^i) (f(x_i, t_m, u(x_i, t_{m-1}), I(\{u(x_i, t_k)\}_{m-1})) - f(x_i, t_m, u_{m-1}^i, u_j^i(\cdot)) + \quad (3.5) \\ + \sum_{i=1}^{N-1} (-h\delta_x^2 \varepsilon_m^i) \hat{\psi}_m^i.$$

Оценим снизу левую часть уравнения (3.5) с помощью определения (2.1) и формулы суммирования по частям:

$$- \sum_{i=1}^{N-1} h\delta_x^2 \varepsilon_m^i D_{\Delta}^{\alpha} \varepsilon_m^i = \frac{\Delta^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{i=1}^{N-1} (-h) \delta_x^2 \varepsilon_m^i (\varepsilon_m^i - \sum_{j=1}^{m-1} (a_{m-j-1} - a_{m-j}) \varepsilon_j^i - \\ - a_{m-1} \varepsilon_0^i) = \frac{h}{\Delta^{\alpha} \Gamma(2-\alpha)} \sum_{i=0}^{N-1} (\delta_x \varepsilon_m^{i+1/2}) (\delta_x \varepsilon_m^{i+1/2} - \\ - \sum_{j=1}^{m-1} (a_{m-j-1} - a_{m-j}) \delta_x \varepsilon_j^{i+1/2} - a_{m-1} \delta_x \varepsilon_0^{i+1/2}) = \quad (3.6) \\ = \frac{1}{\Delta^{\alpha} \Gamma(2-\alpha)} \left( \langle \varepsilon_m, \varepsilon_m \rangle - \sum_{j=1}^{m-1} (a_{m-j-1} - a_{m-j}) \langle \varepsilon_m, \varepsilon_j \rangle - a_{m-1} \langle \varepsilon_m, \varepsilon_0 \rangle \right) \geq \\ \geq \frac{1}{\Delta^{\alpha} \Gamma(2-\alpha)} (\|\varepsilon_m\|^2 - \sum_{j=1}^{m-1} (a_{m-j-1} - a_{m-j}) \frac{\|\varepsilon_m\|^2 + \|\varepsilon_j\|^2}{2} - \\ - a_{m-1} \frac{\|\varepsilon_m\|^2 + \|\varepsilon_0\|^2}{2}) = \frac{1}{2} D_{\Delta} \|\varepsilon_m\|^2.$$

Здесь  $\varepsilon_m$  — послойный вектор погрешности

$$\varepsilon_m = (0, \varepsilon_m^1, \varepsilon_m^2, \dots, \varepsilon_m^{N-1}, 0).$$

Применим неравенство Коши–Шварца для оценки последних двух слагаемых в правой части соотношения (3.5), и, воспользовавшись липшицевостью функции  $f$  по третьему и чет-

вертому аргументам, определением оператора кусочно-постоянной интерполяции и леммой 3.2, получаем

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{N-1} (-h\delta_x^2 \varepsilon_m^i) (f(x_i, t_m, u(x_i, t_{m-1}), I(\{u(x_i, t_k)\}_{m-1})) - f(x_i, t_m, u_{m-1}^i, u_j^i(\cdot))) + \\
& + \sum_{i=1}^{N-1} (-h\delta_x^2 \varepsilon_m^i) \hat{\psi}_m^i \leq h \sum_{i=1}^{N-1} (\delta_x^2 \varepsilon_m^i)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} h |\hat{\psi}_m^i|^2 + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} h |f(x_i, t_m, u(x_i, t_{m-1}), I(\{u(x_i, t_k)\}_{m-1})) - f(x_i, t_m, u_{m-1}^i, u_j^i(\cdot))|^2 \leq \\
& \leq h \sum_{i=1}^{N-1} (\delta_x^2 \varepsilon_m^i)^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} h L_f^2 \max_{m-1-M_0 \leq k \leq m-1} (\varepsilon_k^i)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} h C^2 (\Delta + h^2)^2 \leq \\
& \leq \|\delta_x^2 \varepsilon_m\|_h^2 + 2L_f^2 \max_{m-1-M_0 \leq k \leq m-1} \|\varepsilon_k\|_h^2 + C^2 X (\Delta + h^2)^2.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Обозначим через  $\|\{\varepsilon_k\}_m\|_h$  максимальную норму предыстории погрешности:

$$\|\{\varepsilon_k\}_m\|_h = \max_{m-M_0 \leq k \leq m} \|\varepsilon_k\|_h,$$

тогда полученную оценку можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{N-1} (-h\delta_x^2 \varepsilon_m^i) (f(x_i, t_m, u(x_i, t_{m-1}), I(\{u(x_i, t_k)\}_{m-1})) - f(x_i, t_m, u_{m-1}^i, u_j^i(\cdot))) + \\
& + \sum_{i=1}^{N-1} (-h\delta_x^2 \varepsilon_m^i) \hat{\psi}_m^i \leq \|\delta_x^2 \varepsilon_m\|_h^2 + 2L_f^2 \|\{\varepsilon_k\}_{m-1}\|_h^2 + C^2 X (\Delta + h^2)^2.
\end{aligned}$$

Оценим первое слагаемое в правой части соотношения (3.5) с помощью соотношения (3.4). Если выполняется соотношение (3.4), то из (3.5), (3.6) и (3.7), а также связи норм (3.3), получаем

$$D_\Delta \|\varepsilon_m\|^2 \leq \frac{2L_f^2 X^2}{3} \|\{\varepsilon_k\}_{m-1}\|_h^2 + 2C^2 X (\Delta + h^2)^2.$$

Применим лемму 3.3 и получим

$$\|\varepsilon_m\|^2 \leq 4 \frac{(t_m)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} E_\alpha(2\lambda(t_m)^\alpha) C^2 X (\Delta + h^2)^2, \quad \lambda = \frac{2L_f^2 X^2}{3(2-2^{1-\alpha})}.$$

Используя связь норм (3.2), получаем утверждение теоремы в этом случае.  $\square$

Аналогичным образом доказывается

**Т е о р е м а 3.2.** *Предположим, что выполняются условия леммы 3.1 и условие 3.1. Тогда погрешность метода (2.7) имеет порядок  $\Delta^{2-\alpha} + h^2$ .*

## § 4. Приближенное решение нелинейной разностной схемы

Разностная схема (2.6) на каждом временном шаге представляет собой нелинейную систему большой размерности, поэтому непосредственное нахождение ее решения весьма затруднительно. Изложим методику ее решения с помощью применения метода Ньютона, предварительно переведя нелинейность в левую часть, этот прием описан в [13].

Предполагая однозначную обратимость  $\phi(u)$  на интересующей нас области, сделаем замену  $z = \phi(u)$ ,  $u = \omega(z)$ , соответственно  $z_m^i = \phi(u_m^i)$ , тогда (2.6) для каждого  $m = 1, \dots, M$  запишется в виде

$$D_{\Delta}^{\alpha} \omega(z_m^i) = \delta_x^2 u_m^i + f(x_i, t_m, \omega(z_{m-1}^i), \omega(u_{m-1}^i)(\cdot)), \quad i = 1, \dots, N-1, \\ z_m^0 = \phi(u_0(t_m)), \quad z_m^N = \phi(u_1(t_m)),$$

с начальными условиями  $z_0^i = \phi(\varphi(x_i))$ ,  $i = 0, \dots, N$ .

Перепишем эту систему, явно выделив в левой части уравнения слагаемые, содержащие неизвестные величины. Обозначим

$$D_{\Delta}^{\alpha} \omega(z_m^i) = \hat{D}_{\Delta}^{\alpha} \omega(z_m^i) + \tilde{D}_{\Delta}^{\alpha} \omega(z_{m-1}^i) = \\ = \frac{\Delta^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} (\omega(z_m^i) - \omega(z_{m-1}^i)) + \frac{\Delta^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=1}^{m-1} a_{m-j} (\omega(z_j^i) - \omega(z_{j-1}^i)),$$

тогда

$$\frac{\Delta^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \omega(z_m^i) - \delta_x^2 z_m^i = \frac{\Delta^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \omega(z_{m-1}^i) - \tilde{D}_{\Delta}^{\alpha} \omega(z_{m-1}^i) + \\ + f(x_i, t_m, \omega(z_{m-1}^i), \omega(u_{m-1}^i)(\cdot)), \quad i = 1, \dots, N-1, \\ z_m^0 = \phi(u_0(t_m)), \quad z_m^N = \phi(u_1(t_m)). \quad (4.1)$$

При каждом фиксированном  $m$  (4.1), так же как и (2.6), является системой нелинейных уравнений относительно  $u_m^i$ ,  $i = 1, \dots, N-1$ . Поиск ее точного решения затруднителен, однако ее структура позволяет эффективно использовать численные методы решения нелинейных уравнений.

Для решения (4.1) на каждом временном слое  $m$  применим метод Ньютона. Обозначим приближение  $z_m^i$  на  $k$  итерации через  $z_m^i[k]$ , возьмем  $z_m^i[0] = z_{m-1}^i$ , тогда

$$\omega(z_m^i[k+1]) = \omega(z_m^i[k]) + \omega'(z_m^i[k])(z_m^i[k+1] - z_m^i[k]),$$

и получаем на каждой итерации линейную систему

$$\frac{\Delta^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \omega'(z_m^i[k]) z_m^i[k+1] - \delta_x^2 z_m^i[k+1] = \frac{\Delta^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} (\omega'(z_m^i[k]) z_m^i[k] - \omega(z_m^i[k])) + \\ + \frac{\Delta^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \omega(z_{m-1}^i) - \tilde{D}_{\Delta}^{\alpha} \omega(z_{m-1}^i) + f(x_i, t_m, \omega(z_{m-1}^i), \omega(u_{m-1}^i)(\cdot)). \quad (4.2)$$

Система (4.2) представляет собой трехдиагональную систему линейных уравнений и может быть решена методом прогонки, если для всех допустимых  $z$  выполняется условие

У с л о в и е 4.1.

$$\omega'(z) > 0.$$

## § 5. Примеры

**Пример 5.1.** В области  $x \in (1, 2)$ ,  $t \in (0.0256, 1.0256)$  рассмотрим нелинейную начально-краевую задачу с распределенным запаздыванием. Величина запаздывания  $\tau = 0.5$ .

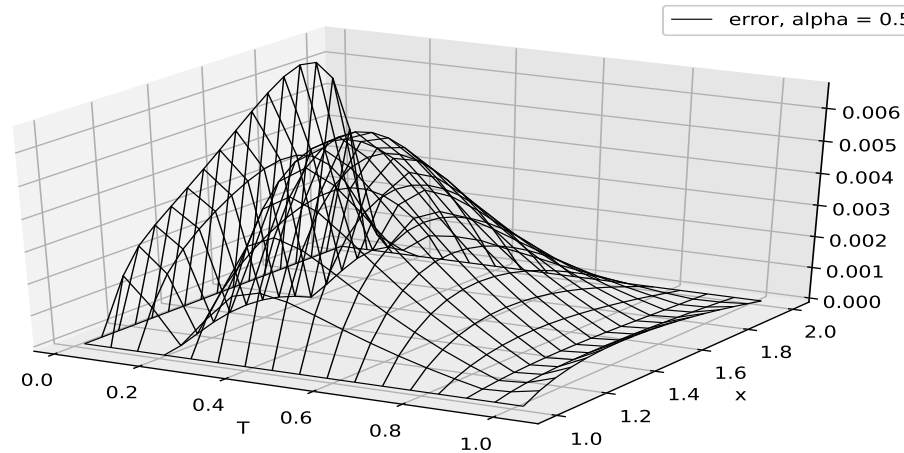
$$\frac{\partial^{\alpha} u(x, t)}{\partial t^{\alpha}} = \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} + \left( \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3-\alpha)} t^{2-\alpha} - \frac{t_0^2 (t-t_0)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \right) x^2 + \\ + \int_{-\tau}^0 u(x, t+s) ds + x^2 (-\tau t^2 + \tau^2 t - \tau^3/3), \quad (5.1)$$



порядок производной Капуто  $\alpha = 0.5$ , начальное время  $t_0 = 0.0256$ . Начальные и граничные условия устанавливаются следующим образом:

$$u(1, t) = t^2, \quad u(2, t) = 4t^2, \quad u(x, t_0) = u(x, 0.0256) = 0.0256^2 x^2.$$

Задача (5.1) имеет точное решение  $u(x, t) = x^2 t^2$ . На рис. 1 можно увидеть абсолютную погрешность решения уравнения, полученного нашей схемой аппроксимации.



**Рис. 1.** Абсолютная погрешность решения уравнения (5.1) при количестве шагов по  $x$  — 16, по  $t$  — 16

**Таблица 1.** Нормы разностей точного и приближенного решений уравнения (5.1) при разных шагах дискретизации

N	M	Error
4	4	0.057222
4	8	0.013424
4	16	0.006258
8	8	0.013126
8	16	0.006539
16	16	0.006628

Эксперименты показывают уменьшение погрешности метода при увеличении количества шагов.

**Пример 5.2.** Рассмотрим модельный пример, являющийся частным случаем обобщенной дробной модели популяции с запаздыванием [1].

$$\frac{\partial^\alpha p}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^2 \phi(p)}{\partial x^2} + p(t)(1 - \lambda p(t - \tau, x)), \quad (5.2)$$

величина запаздывания  $0 \leq \tau \leq 1$ , с начальными условиями:

$$p(1, 0) = \exp \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{2}} x \right).$$

При  $\alpha = 1$  уравнение (5.2) является аналогом уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова (уравнение Фишера) с запаздыванием, или уравнения Хатчинсона с диффузией. Применив наш метод, мы получим приближенное решение.

**Таблица 2.** Оценка погрешности приближенного решений уравнения (5.2) при различных шагах дискретизации

N	M	Error
4	4	0.087213
4	8	0.022815
4	16	0.012639
8	8	0.018816
8	16	0.008974
16	32	0.008182

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Srivastava V.K., Kumar S., Awasthi M.K., Singh K.B. Two-dimensional time fractional-order biological population model and its analytical solution // *Egyptian Journal of Basic and Applied Sciences*. 2014. Vol. 1. Issue 1. P. 71–76. <https://doi.org/10.1016/j.ejbas.2014.03.001>
2. Бабский В.Г., Мышкис А.Д. Математические модели в биологии, связанные с учетом последствия // *Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях*. М.: Мир, 1983. С. 383–394.
3. Macías-Díaz J.E. Numerical study of the process of nonlinear supratransmission in Riesz space-fractional sine-Gordon equations // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2017. Vol. 46. P. 89–102. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2016.11.002>
4. Gao G., Alikhanov A.A., Sun Z. The temporal second order difference schemes based on the interpolation approximation for solving the time multi-term and distributed-order fractional sub-diffusion equations // *Journal of Scientific Computing*. 2017. Vol. 73. No. 1. P. 93–121. <https://doi.org/10.1007/s10915-017-0407-x>
5. Stynes M., O’Riordan E., Gracia J. Error analysis of a finite difference method on graded meshes for a time-fractional diffusion equation // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 2017. Vol. 55. No. 2. P. 1057–1079. <https://doi.org/10.1137/16M1082329>
6. Liao H., Li D., Zhang J. Sharp error estimate of the nonuniform L1 formula for linear reaction-subdiffusion equations // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 2018. Vol. 56. No. 2. P. 1112–1133. <https://doi.org/10.1137/17M1131829>
7. Chen H., Stynes M. Error analysis of a second-order method on fitted meshes for a time-fractional diffusion problem // *Journal of Scientific Computing*. 2019. Vol. 79. No. 1. P. 624–647. <https://doi.org/10.1007/s10915-018-0863-y>
8. Płociniczak L. Numerical method for the time-fractional porous medium equation // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 2019. Vol. 57. No. 2. P. 638–656. <https://doi.org/10.1137/18M1192561>
9. Li D., Liao H., Sun W., Wang J., Zhang J. Analysis of L1-Galerkin FEMs for time-fractional nonlinear parabolic problems // *Communications in Computational Physics*. 2018. Vol. 24. No. 1. P. 86–103. <https://doi.org/10.4208/cicp.OA-2017-0080>
10. Li L., Zhou B., Chen X., Wang Z. Convergence and stability of compact finite difference method for nonlinear time fractional reaction–diffusion equations with delay // *Applied Mathematics and Computation*. 2018. Vol. 337. P. 144–152. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.04.057>
11. Hendy A.S., Pimenov V.G., Macías-Díaz J.E. Convergence and stability estimates in difference setting for time-fractional parabolic equations with functional delay // *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. 2020. Vol. 36. No. 1. P. 118–132. <https://doi.org/10.1002/num.22421>
12. Пименов В.Г. Разностные методы решения уравнений в частных производных с наследственностью. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2014. <https://elibrary.ru/item.asp?id=26520733>
13. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.

14. Gorbova T., Solodushkin S. Nonlinear difference scheme for fractional equation with functional delay // AIP Conference Proceedings. 2020. Vol. 2312. Issue 1. P. 050007. <https://doi.org/10.1063/5.0035580>
15. Li C. P., Zeng F. H. Numerical methods for fractional calculus. Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2015.
16. Ким А. В., Пименов В. Г. i-Гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2004.

Поступила в редакцию 04.03.2021

Горбова Татьяна Владимировна, аспирант, кафедра вычислительной математики и компьютерных наук, Уральский федеральный университет, 620000, Россия, г. Екатеринбург, пр. Ленина, 51.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5250-4700>

E-mail: [tvgorbova@gmail.com](mailto:tvgorbova@gmail.com)

**Цитирование:** Т. В. Горбова. Численный алгоритм для модели популяционной динамики дробного порядка с запаздыванием // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2021. Т. 57. С. 91–103.

**Keywords:** population model, fractional-diffusion equation, differentiation with nonlinearity, functional delay, difference scheme, Newton's method, order of convergence.

MSC2020: 65M06, 65M12, 65M15, 65Q20

DOI: 10.35634/2226-3594-2021-57-03

For a fractional-diffusion equation with nonlinearity in the differentiation operator and with the effect of functional delay, an implicit numerical method is constructed based on the approximation of the fractional derivative and the use of interpolation and extrapolation of discrete history. The source of this problem is a generalized model from population theory. Using a fractional discrete analogue of Gronwall's lemma, the convergence of the method is proved under certain conditions. The resulting system of nonlinear equations using Newton's method is reduced to a sequence of linear systems with tridiagonal matrices. Numerical results are given for a test example with distributed delay and a model example from the theory of population with concentrated constant delay.

#### REFERENCES

1. Srivastava V.K., Kumar S., Awasthi M.K., Singh K.B. Two-dimensional time fractional-order biological population model and its analytical solution, *Egyptian Journal of Basic and Applied Sciences*, 2014, vol. 1, issue 1, pp. 71–76. <https://doi.org/10.1016/j.ejbas.2014.03.001>
2. Babitskii V.G., Myshkis A.D. Mathematical models in biology connected with regard of delays, *Lectures on nonlinear differential-equation models in biology*, Moscow: Mir, 1983, pp. 383–394 (in Russian).
3. Macías-Díaz J.E. Numerical study of the process of nonlinear supratransmission in Riesz space-fractional sine-Gordon equations, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2017, vol. 46, pp. 89–102. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2016.11.002>
4. Gao G., Alikhanov A.A., Sun Z. The temporal second order difference schemes based on the interpolation approximation for solving the time multi-term and distributed-order fractional sub-diffusion equations, *Journal of Scientific Computing*, 2017, vol. 73, no. 1, pp. 93–121. <https://doi.org/10.1007/s10915-017-0407-x>
5. Stynes M., O'Riordan E., Gracia J. Error analysis of a finite difference method on graded meshes for a time-fractional diffusion equation, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2017, vol. 55, no. 2, pp. 1057–1079. <https://doi.org/10.1137/16M1082329>
6. Liao H., Li D., Zhang J. Sharp error estimate of the nonuniform L1 formula for linear reaction-sub-diffusion equations, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2018, vol. 56, no. 2, pp. 1112–1133. <https://doi.org/10.1137/17M1131829>
7. Chen H., Stynes M. Error analysis of a second-order method on fitted meshes for a time-fractional diffusion problem, *Journal of Scientific Computing*, 2019, vol. 79, no. 1, pp. 624–647. <https://doi.org/10.1007/s10915-018-0863-y>
8. Plociniczak Ł. Numerical method for the time-fractional porous medium equation, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2019, vol. 57, no. 2, pp. 638–656. <https://doi.org/10.1137/18M1192561>
9. Li D., Liao H., Sun W., Wang J., Zhang J. Analysis of L1-Galerkin FEMs for time-fractional nonlinear parabolic problems, *Communications in Computational Physics*, 2018, vol. 24, no. 1, pp. 86–103. <https://doi.org/10.4208/cicp.OA-2017-0080>
10. Li L., Zhou B., Chen X., Wang Z. Convergence and stability of compact finite difference method for nonlinear time fractional reaction–diffusion equations with delay, *Applied Mathematics and Computation*, 2018, vol. 337, pp. 144–152. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.04.057>

11. Hendy A. S., Pimenov V. G., Macías-Días J. E. Convergence and stability estimates in difference setting for time-fractional parabolic equations with functional delay, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 2020, vol. 36, no. 1, pp. 118–132. <https://doi.org/10.1002/num.22421>
12. Pimenov V. G. *Raznostnye metody resheniya uravnenii v chastnykh proizvodnykh s nasledstvennost'yu* (Difference methods for solving of partial differential equations with heredity), Yekaterinburg: Ural Federal University, 2014. <https://elibrary.ru/item.asp?id=26520733>
13. Samarskii A. A. *Teoriya raznostnykh skhem* (The theory of difference schemes), Moscow: Nauka, 1989.
14. Gorbova T., Solodushkin S. Nonlinear difference scheme for fractional equation with functional delay, *AIP Conference Proceedings*, 2020, vol. 2312, issue 1, pp. 050007. <https://doi.org/10.1063/5.0035580>
15. Li C. P., Zeng F. H. *Numerical methods for fractional calculus*, Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2015.
16. Kim A. V., Pimenov V. G. *i-Gladkii analiz i chislennye metody resheniya funktsional'no-differentsial'nykh uravnenii* (i-Smooth analysis and numerical methods for solving functional differential equations), Izhevsk: RCD, 2004.

Received 04.03.2021

Gorbova Tat'yana Vladimirovna, Post-Graduate Student, Department of Computational Mathematics and Computer Science, Ural Federal University, pr. Lenina, 51, Yekaterinburg, 620000, Russia.  
E-mail: [tvgorbova@gmail.com](mailto:tvgorbova@gmail.com)

**Citation:** T. V. Gorbova. Numerical algorithm for fractional order population dynamics model with delay, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2021, vol. 57, pp. 91–103.